

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2023-2024

Prova scritta in aula del 03.09.2024

Parte II - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

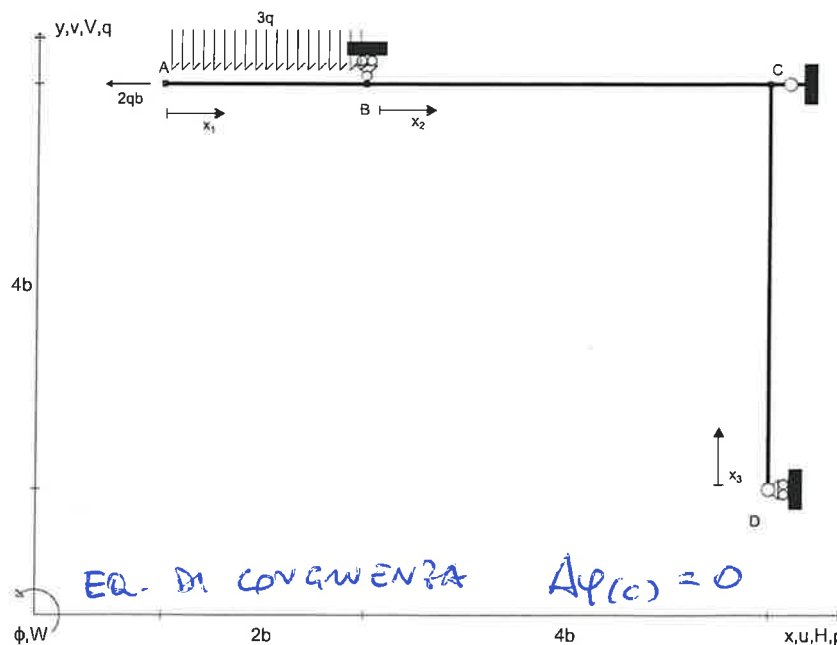
Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità C , M_C . Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la componente verticale di spostamento del punto A , v_A . Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 03.09.24*001



Esercizio n. 2 (7 punti)

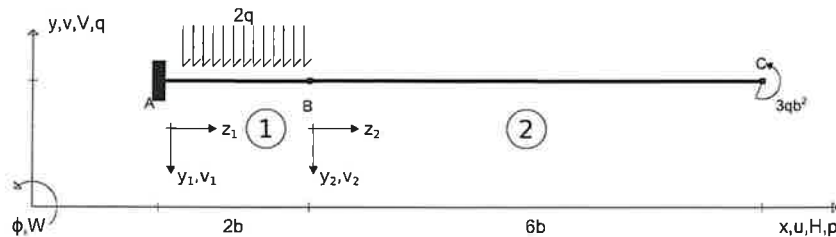
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

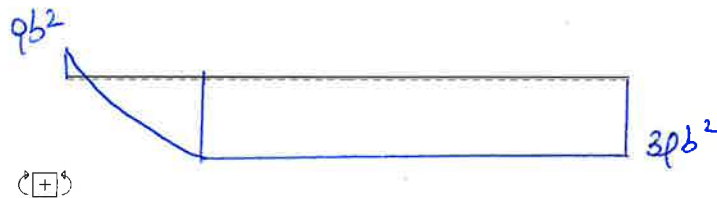
1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto B φ_B ;
4. Lo spostamento verticale del punto C , v_C .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 03.09.24*001



$\uparrow \oplus \downarrow$



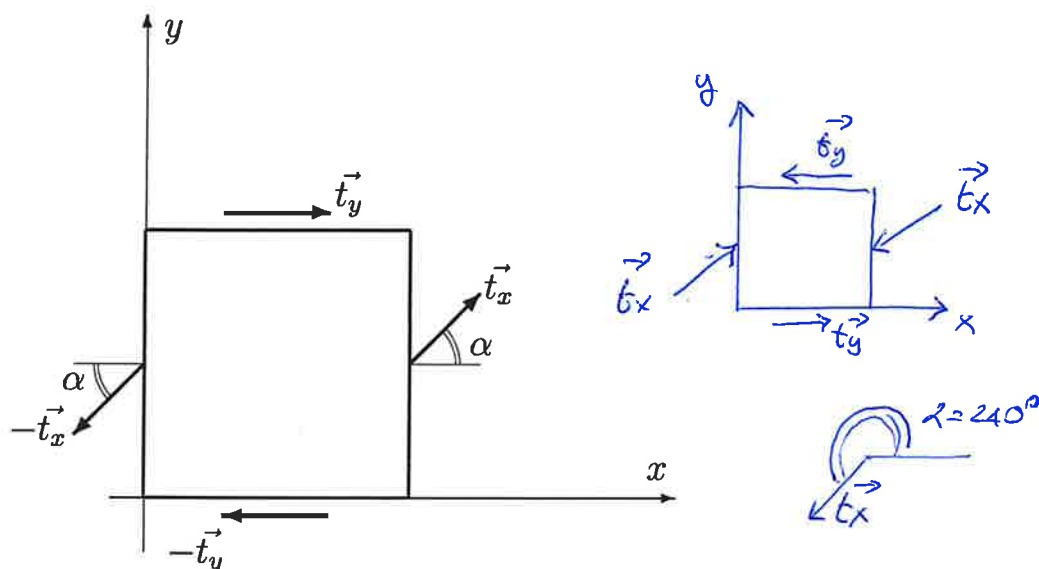
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; V_A (\uparrow) = 4pb; M_A (\curvearrowright) = qb^2; \\
 N_{AB} &= //; T_{AB} = 4pb - 2qz_1; M_{AB} = -qb^2 + 4pbz_1 - qz_1^2; \\
 N_{BC} &= //; T_{BC} = //; M_{BC} = 3pb^2; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0) = 0; v_1'(z_1=0) = 0; \text{ c.c in } B = v_1(z_1=2b) = v_2(z_2=0); v_1'(z_1=2b) = v_2'(z_2=0); \\
 \text{c.c in } C &= //; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{2} pb^2 z_1^2 - \frac{2}{3} qb z_1^3 + \frac{1}{12} q z_1^4 \right); v_1'(z_1) = \frac{1}{EI} (pb^2 z_1 - 2pbz_1^2 + \frac{1}{3} q z_1^3); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(-\frac{3}{2} pb^2 z_2^2 - \frac{10}{3} pb^3 z_2 - 2pb^4 \right); v_2'(z_2) = \frac{1}{EI} (-3pb^2 z_2 - \frac{10}{3} qb^3); \\
 v_C &= -\frac{76qb^4}{EI} (\uparrow); \varphi_B = -\frac{10qb^3}{3EI} (\curvearrowright);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 240^\circ$ (sicché; $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 25$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

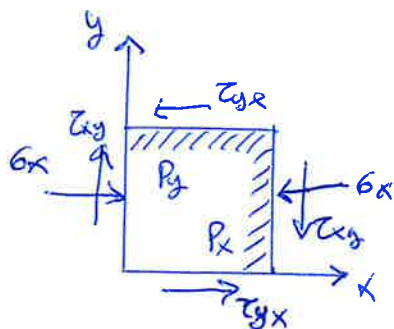
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = -12,500 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -21,651 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 16,285 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -28,785 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 22,535 \text{ (MPa)};$$

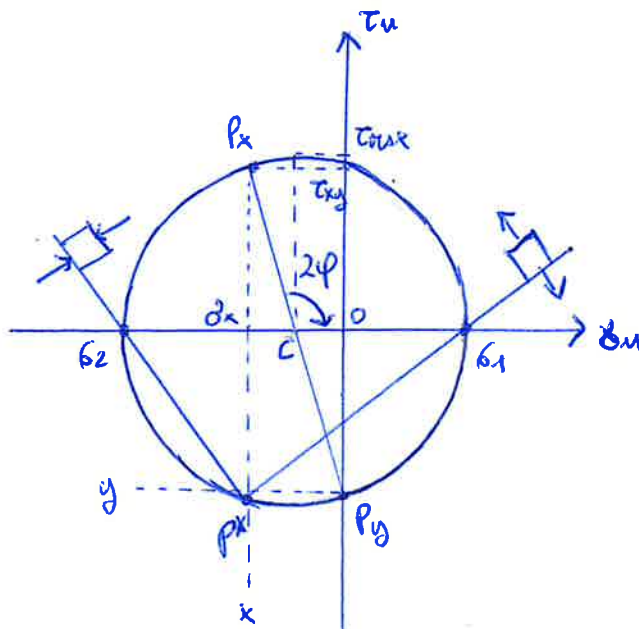
cerchio di Mohr:

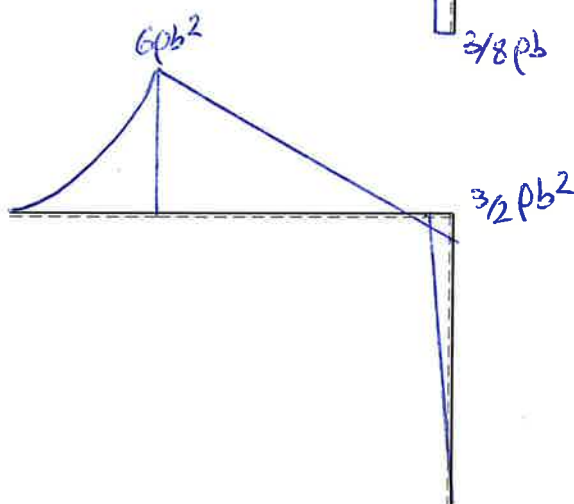
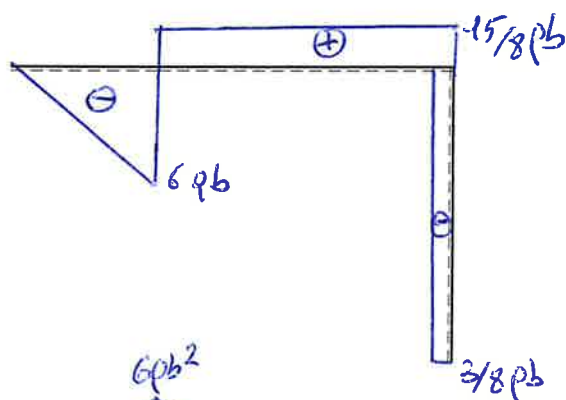
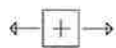
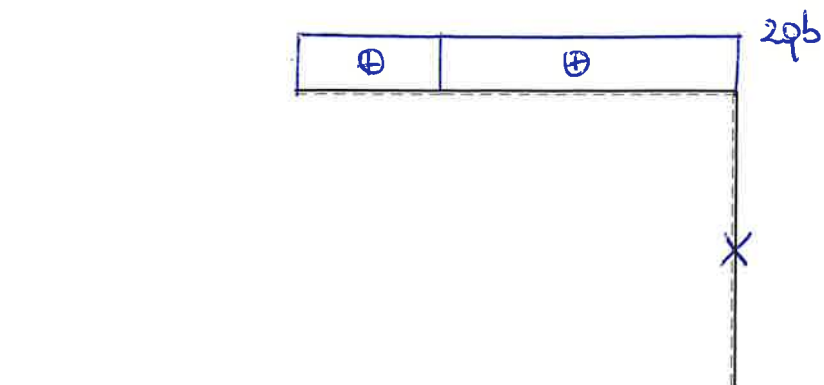


$$P_x = (-12,500; 21,651)$$

$$P_y = (0,000; -21,651)$$

$$\varphi = 53,05 \text{ (}^\circ\text{)};$$





$$\begin{aligned}
 V_B(\uparrow) &= \frac{63}{8} qb; & H_C(\Rightarrow) &= \frac{13}{8} qb; & V_C(\uparrow) &= -\frac{15}{8} qb; & H_D(\Rightarrow) &= \frac{3}{8} qb; & M_C(\curvearrowright) &= \frac{3}{2} qb^2; \\
 N_{AB} &= 2qb; & T_{AB} &= -3qx_1; & M_{AB} &= -\frac{3}{2} qx_1^2; \\
 N_{BC} &= 2qb; & T_{BC} &= \frac{15}{8} qb; & M_{BC} &= -6qb^2 + \frac{15}{8} qb x_2; \\
 N_{DC} &= 1; & T_{DC} &= -\frac{3}{8} qb; & M_{DC} &= \frac{3}{8} qb x_3; \\
 v_A &= -\frac{20 qb^4}{EI} \quad (\downarrow)
 \end{aligned}$$

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2023-2024

Prova scritta in aula del 03.09.2024

Parte II – Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità C , M_C .

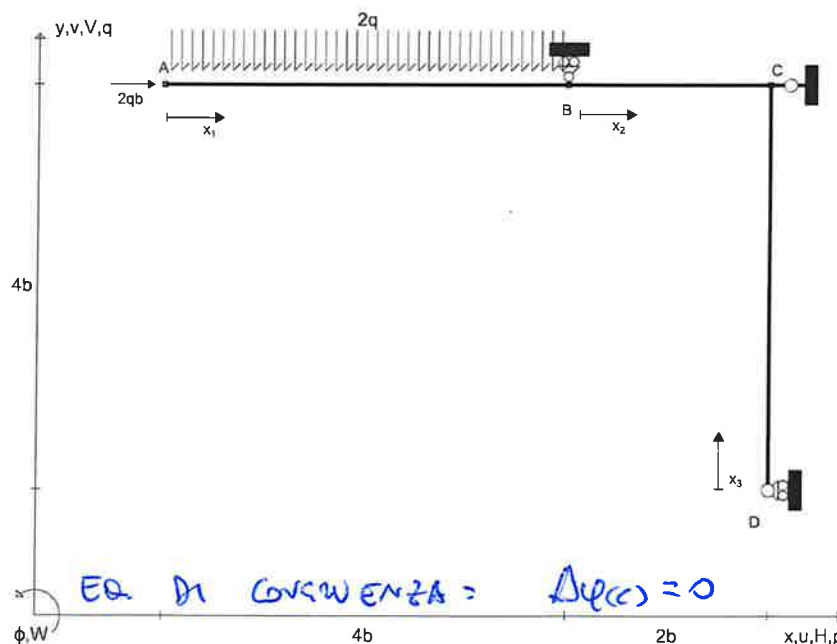
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la componente verticale di spostamento del punto A , v_A .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 03.09.24*002



Esercizio n. 2 (7 punti)

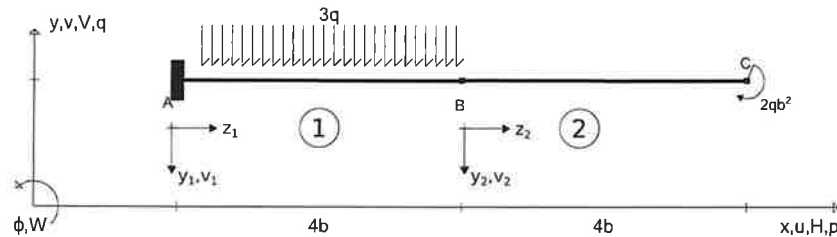
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto B φ_B ;
4. Lo spostamento verticale del punto C , v_C .

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 03.09.24*002



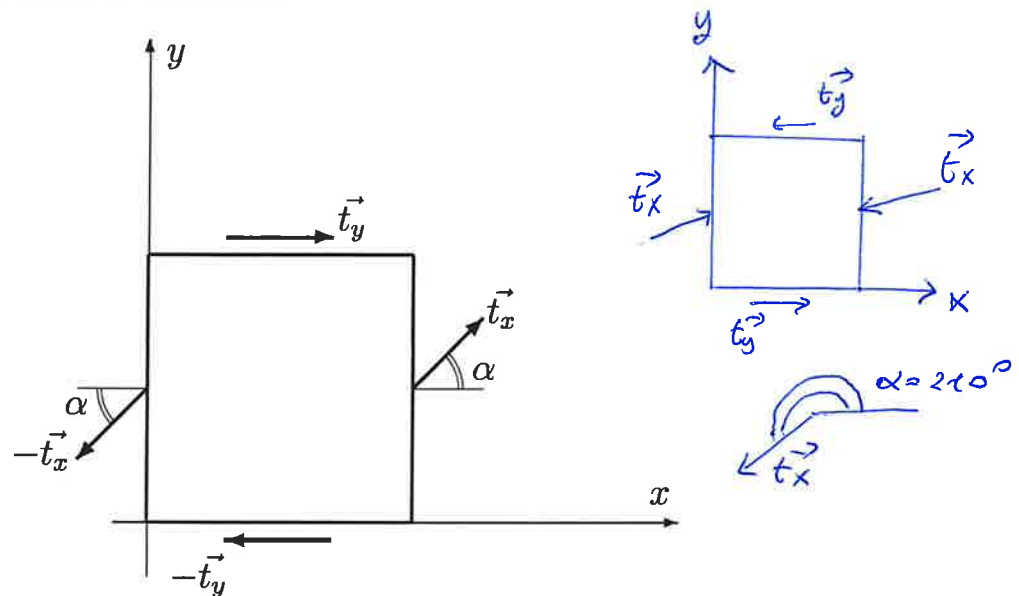
↑ ⊕ ↓

↺ ⊕ ↻

$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; V_A (\uparrow) = 12pb; M_A (\curvearrowright) = 26pb^2; \\
 N_{AB} &= //; T_{AB} = 12pb - 3qz_1; M_{AB} = -26pb^2 + 12pbz_1 - \frac{3}{2}qz_1^2; \\
 N_{BC} &= //; T_{BC} = //; M_{BC} = -2qb^2; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0)=0; v_1'(z_1=0)=0; \text{ c.c in } B = v_1(z_1=4b)=v_2(z_2=0); v_1'(z_1=4b)=v_2'(z_2=0) \\
 \text{c.c in } C &= //; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EJ} (13pb^2z_1^2 - 2pbz_1^3 + \frac{1}{8}qz_1^4); v_1'(z_1) = \frac{1}{EJ} (26pb^2z_1 - 6pbz_1^2 + \frac{1}{2}qz_1^3); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EJ} (qb^2z_2^2 + 40qb^3z_2 + 112qb^4); v_2'(z_2) = \frac{1}{EJ} (2pb^2z_2 + 40qb^3); \\
 v_C &= \frac{288pb^4}{EJ} (\downarrow); \varphi_B = \frac{40qb^3}{EJ} (\downarrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

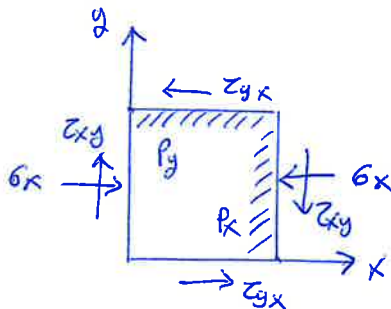
Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 210^\circ$ (sicché; $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 25$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale* (ma di verso non specificato!), come indicato in Figura. Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} . Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = -21,651 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -12,500 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 5,711 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -27,361 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 16,536 \text{ (MPa)};$$

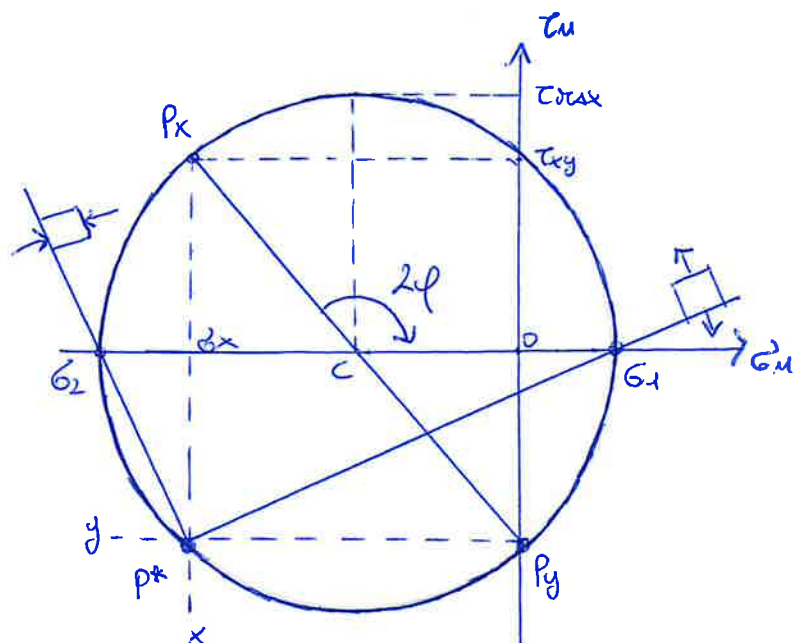
cerchio di Mohr:

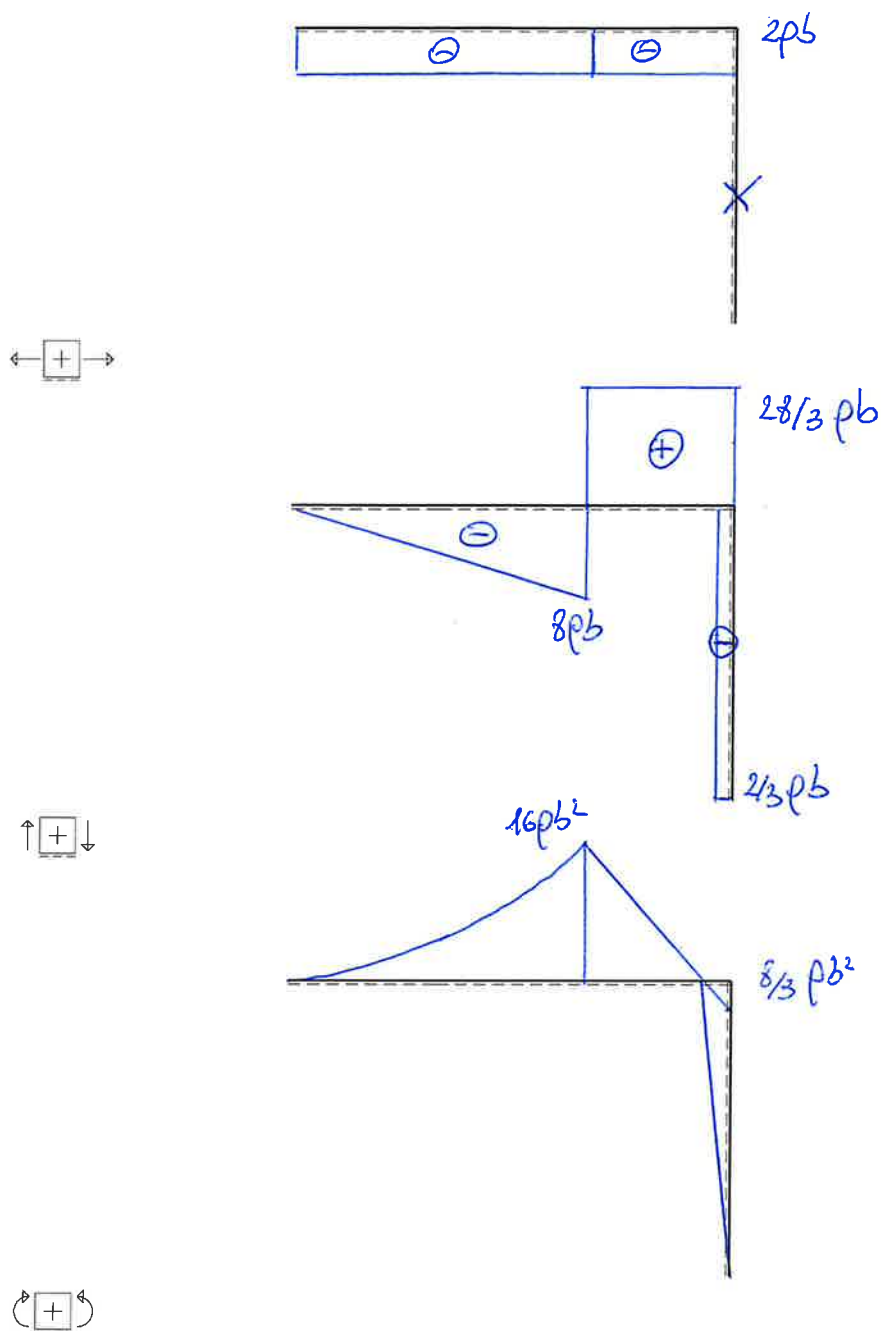


$$P_x = (-21,651; 12,500)$$

$$P_y = (0,000; -12,500)$$

$$\varphi = 65,44 \text{ (}^\circ\text{)};$$





$V_B(\uparrow) = -2pb$	$H_C(\Rightarrow) = -2pb$	$V_C(\uparrow) = 2/3 pb$	$H_D(\Rightarrow) = 2/3 pb$	$M_C(\curvearrowright) = 8/3 pb^2$
$N_{AB} = -2pb$	$T_{AB} = -2px_1$	$M_{AB} = -px_1^2$		
$N_{BC} = -2pb$	$T_{BC} = 28/3 pb$	$M_{BC} = -16pb^2 + 28/3 pb x_2$		
$N_{DC} = -2pb$	$T_{DC} = -2/3 pb$	$M_{DC} = 2/3 pb x_3$		
$\theta_A = -328 pb^2 / 8 \text{ ed}$	(\downarrow)			